

# INSIEMI FRATTALI

- Dimensione di un insieme
- Insiemi frattali elementari
- Dimensioni frattali
- Insiemi frattali e sistemi dinamici

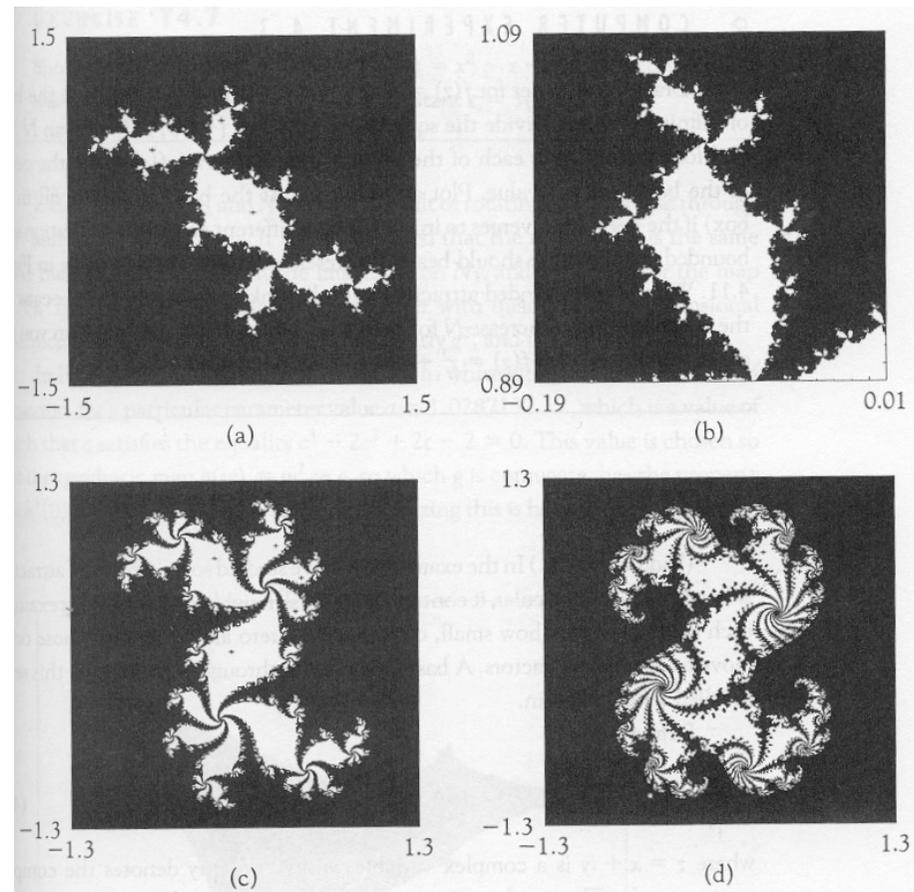
Caratteristiche tipiche di un **insieme frattale** sono

- **struttura complessa** su scala **arbitrariamente piccola**
- **autosomiglianza**
- dimensione **non intera**

**Esempio:** insiemi di Julia  $\Rightarrow$

Alcuni oggetti **in natura** hanno caratteristiche analoghe:

profili costieri,  
cavolfiori,  
coralli,  
alberi,  
reti idrologiche,  
sistema nervoso,  
bronchi,  
anelli di Saturno,  
...



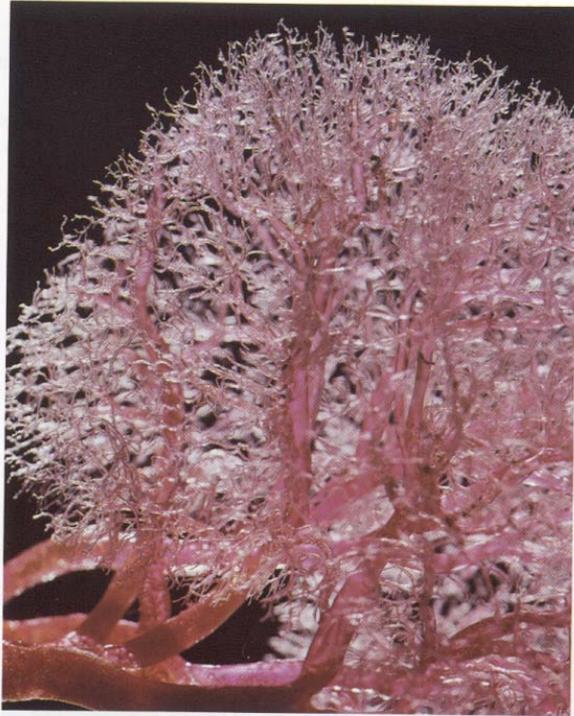


Plate 2: Cast of a child's kidney, venous and arterial system, © Manfred Kage, Institut für wissenschaftliche Fotografie.

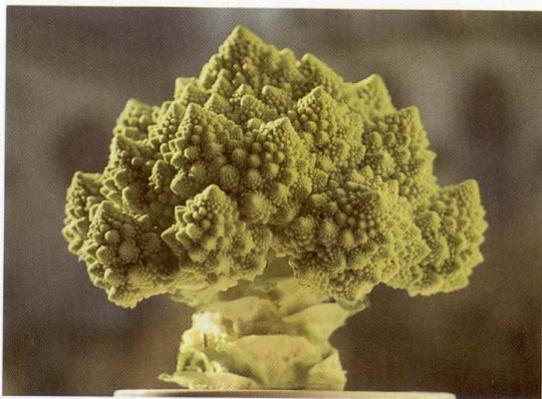


Plate 3: Broccoli Romanesco.

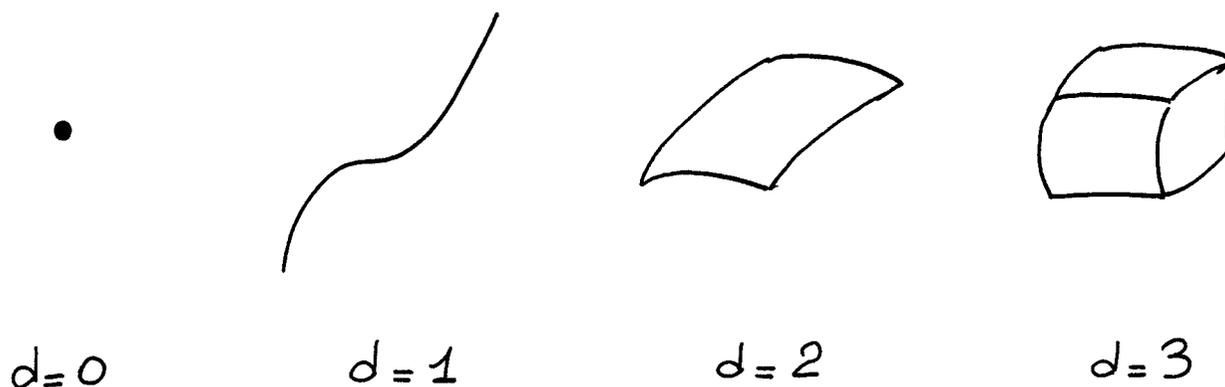


Plate 4: Wadi Hadramaut, Gemini IV image, © Dr. Vehrenberg KG.

## DIMENSIONE DI UN INSIEME

Consideriamo insiemi "semplici" in  $\mathbb{R}^n$ : punto, linea, superficie,....

In modo intuitivo, possiamo dire che la **dimensione** è il **numero di coordinate** necessarie per identificare ogni punto dell'insieme.

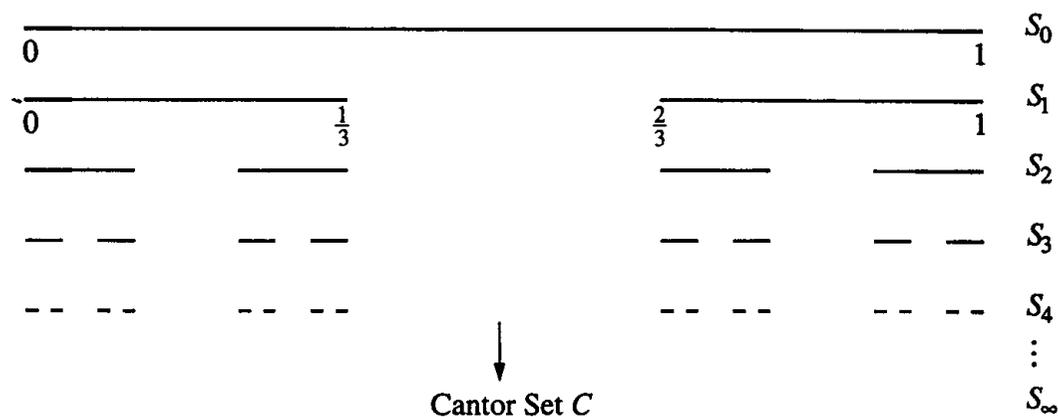


Quindi oggetti "semplici" hanno **dimensione intera**, così come la riunione di un insieme numerabile di tali oggetti.

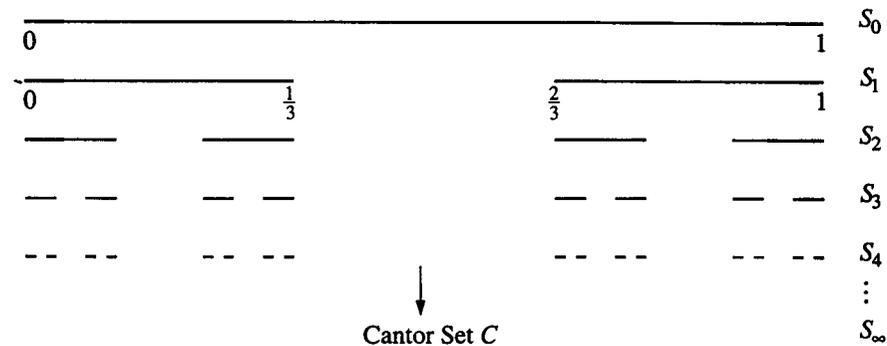
## INSIEMI FRATTALI ELEMENTARI

L'insieme di Cantor ("middle-third Cantor set")

Partendo dal segmento  $[0,1]$ , ad ogni passo si elimina il "terzo centrale" di ogni segmento.



L'insieme di Cantor è l'insieme  $C = S_\infty$  ottenuto applicando la procedura infinite volte.



- $C$  è **autosomigliante**: contiene copie di se stesso a qualunque scala (p.e.: la parte di  $C$  in  $[0, 1/3]$  è uguale a tutto  $C$ , scalato di un fattore 3).
- $C$  ha **lunghezza nulla**. Infatti la lunghezza dell'insieme  $S_{k+1}$  vale  $l_{k+1} = (2/3)l_k$  e quindi tende a 0 per  $k \rightarrow \infty$ . Quindi la sua **dimensione** è  $< 1$  ("è meno di una linea...").
- $C$  è un **insieme infinito** (=contiene infiniti punti) **non numerabile** ("è più che un punto...").

Vedremo che la **dimensione** di  $C$  è **non intera**, compresa tra 0 e 1.

In generale, si definisce **insieme di Cantor topologico** un insieme  $S$  che soddisfa le due proprietà:

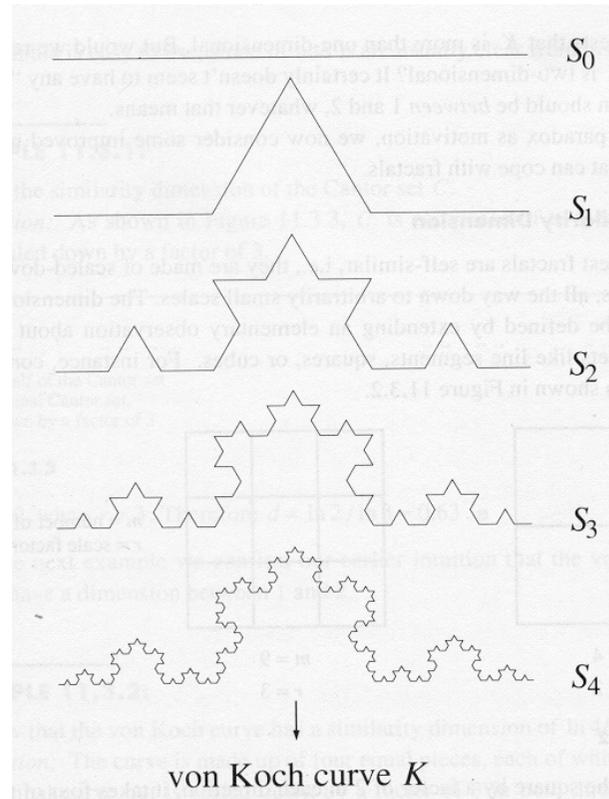
- $S$  è totalmente **non connesso**:  $S$  non contiene alcun sottoinsieme connesso, cioè ogni punto è “separato” da ogni altro punto.
- $S$  **non contiene punti isolati**: ogni punto di  $S$  ha, in ogni suo intorno arbitrariamente piccolo, altri punti di  $S$ .

L'insieme di Cantor “middle-third” possiede queste due proprietà.

Tipicamente, gli **attrattori caotici** di sistemi a tempo discreto (e quindi anche delle mappe di Poincaré di sistemi a tempo continuo) **sono insiemi di Cantor topologici**.

## La curva di von Koch

Partendo da un segmento  $S_0$ , ad ogni passo si elimina il "terzo centrale" di ogni segmento e lo si sostituisce con gli altri due lati di un triangolo equilatero.



La curva di von Koch è l'insieme  $K = S_\infty$  ottenuto applicando la procedura infinite volte.

Nota bene:

La curva di von Koch  $K$  ha **lunghezza infinita**.

Infatti la lunghezza dell'insieme  $S_{k+1}$  vale  $l_{k+1} = (4/3)l_k$  e quindi tende a  $\infty$  per  $k \rightarrow \infty$ .  
Quindi la **dimensione** di  $K$  è  $> 1$  ("è più di una linea...").

Tuttavia, poiché  $K$  è composta da una riunione di segmenti, la sua **area** sarà nulla ("è meno di una superficie...").

La **dimensione** di  $K$  è **non intera**, compresa tra 1 e 2.

## DIMENSIONI FRATTALI

Sono stati proposti vari criteri per quantificare la **dimensione degli insiemi frattali** ("dimensione frattale"). Ne analizziamo tre:

Dimensione "box-counting"  $d_B$

Dimensione di **correlazione**  $d_C$

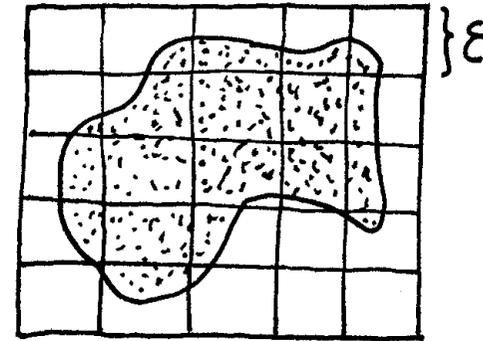
Dimensione di **Liapunov**  $d_L$

## Dimensione "box-counting"

Consideriamo un insieme  $S \subset \mathbb{R}^n$  contenuto in un "cubo"  $n$ -dimensionale  $H$ , e partizioniamo  $H$  in "cubetti" ("box") di lato  $\varepsilon$ .

Il numero totale di box  $T(\varepsilon)$  è proporzionale a  $(1/\varepsilon)^n$ .

Indichiamo con  $N(\varepsilon)$  il numero di box che contengono almeno un punto di  $S$ .



$S$  ha dimensione  $d_B$  se, per  $\varepsilon$  piccolo,  $N(\varepsilon)$  varia secondo la legge di potenza

$$N(\varepsilon) = \gamma \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^{d_B} \quad \text{cioè} \quad \log N(\varepsilon) = \log \gamma + d_B \log(1/\varepsilon)$$

Per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si ottiene la definizione di **dimensione "box-counting"**

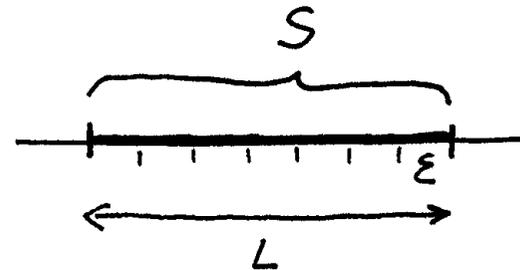
$$d_B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

Esempio: insiemi "semplici"

$$n = 1$$

Un **segmento** di lunghezza  $L$  è coperto da  $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$  box.

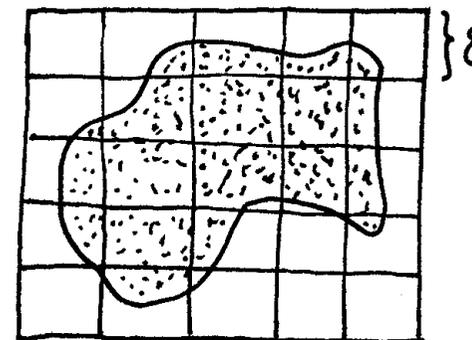
Quindi  $d_B = 1$ .



$$n = 2$$

Una **superficie** di area  $A$  è coperta, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , da  $N(\varepsilon) \rightarrow A/\varepsilon^2$  box.

Quindi  $d_B = 2$ .

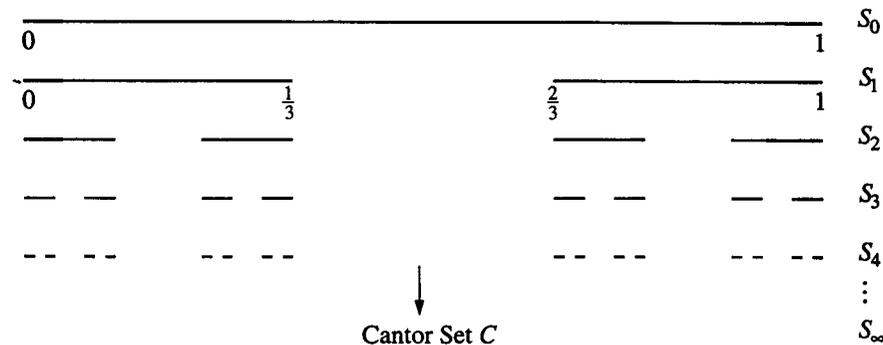


Esempio: insieme di Cantor "middle-third"

L'insieme  $S_k$  è coperto da  $N(\varepsilon) = 2^k$  intervalli, ciascuno di lunghezza  $\varepsilon = (1/3)^k$ .

$$d_B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 2}{k \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0.63093$$

Pertanto la **dimensione** dell'insieme di Cantor  $C$  è **non intera** (= frattale).

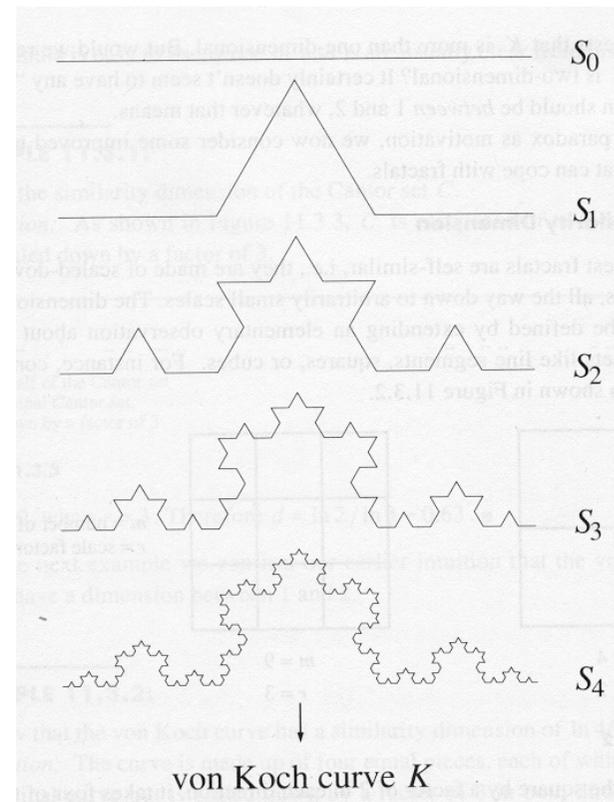


Esempio: curva di von Koch

L'insieme  $S_k$  è coperto da  $N(\varepsilon) = 4^k$  intervalli, ciascuno di lunghezza  $\varepsilon = (1/3)^k$ .

$$d_B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 4^k}{\log 3^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log 4}{k \log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1.2618$$

Pertanto la **dimensione** della curva di von Koch è **non intera** (= frattale).



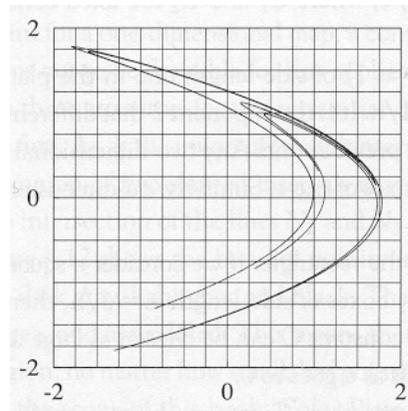
Nella maggior parte dei casi, la **dimensione** deve essere **calcolata numericamente**.

**Esempio:** si vuole calcolare  $d_B$  per l'attrattore del sistema di Henon

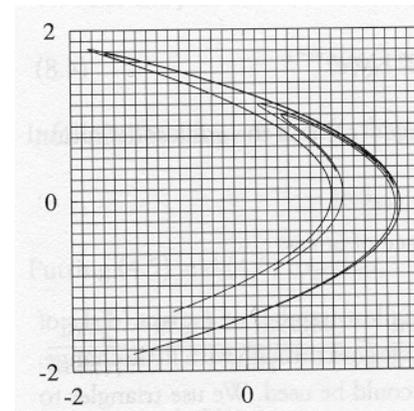
$$x(t+1) = y(t) + 1 - ax(t)^2 \quad y(t+1) = bx(t)$$

Si valuta  $N(\varepsilon)$  per valori di  $\varepsilon$  decrescenti, e si grafica

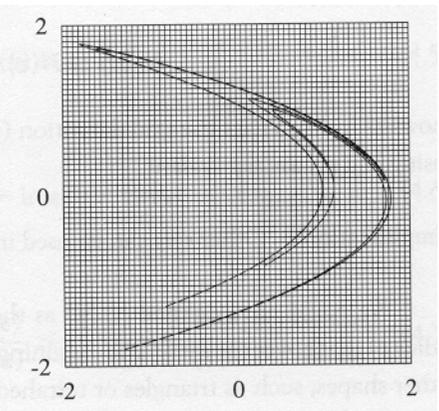
$N(\varepsilon)$  in funzione di  $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ .



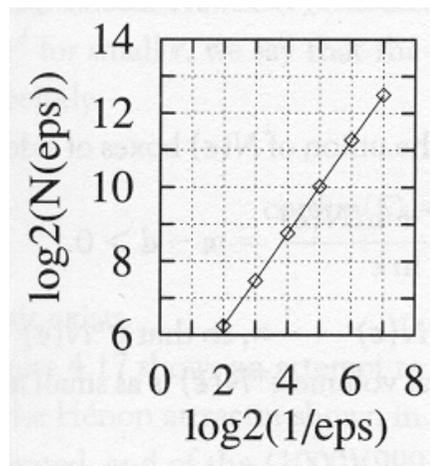
$\varepsilon = 1/4$



$\varepsilon = 1/8$



$\varepsilon = 1/16$



Poiché  $\log N(\varepsilon) = \log \gamma + d_B \log(1/\varepsilon)$ , la **pendenza** del grafico su scale logaritmiche fornisce la **stima** di  $d_B$ .

In questo caso  $d_B \cong 1.27$ .

## Dimensione di correlazione

E' relativa all'insieme di punti  $S = \{x(0), x(1), \dots\}$ , tipicamente ottenuto come **traiettoria** di un sistema a tempo discreto  $x(t+1) = f(x(t))$ .

Fissato  $r > 0$ , la **funzione di correlazione**  $C(r)$  è la frazione di coppie di punti della traiettoria che hanno tra loro **distanza** inferiore a  $r$ :

$$C(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\#\text{coppie}(x(i), x(j)) \text{ t.c. } \|x(i) - x(j)\| < r}{\#\text{coppie}(x(i), x(j))}$$

$S$  ha dimensione  $d_C$  se, per  $r$  piccolo,  $C(r)$  varia secondo la **legge di potenza**

$$C(r) = \gamma r^{d_C} \quad \text{cioè} \quad \log C(r) = \log \gamma + d_C \log r$$

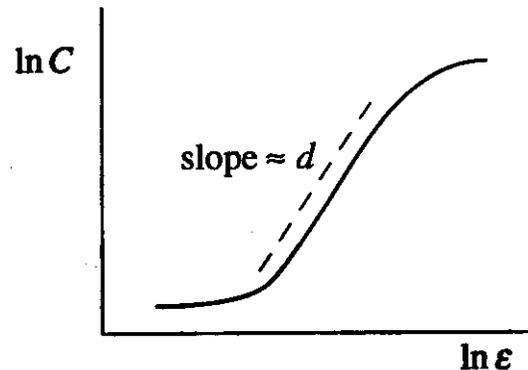
Per  $r \rightarrow 0$ , si ottiene la definizione di **dimensione di correlazione**

$$d_C = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r}$$

Nota bene: data una traiettoria,  $C(r)$  viene **calcolato numericamente** per vari valori di  $r$  e si **grafica**  $C(r)$  in funzione di  $r$ .

Poiché  $\log C(r) = \log \gamma + d_C \log r$ , la **pendenza** del grafico su scale logaritmiche fornisce la **stima** di  $d_C$ .

Tipicamente, il grafico **si deforma** per  $r$  **grande** (il numero di coppie con distanza  $< r$  satura) e per  $r$  **piccolo** (poiché la traiettoria ha lunghezza finita, a scala piccola le coppie si rarefanno).

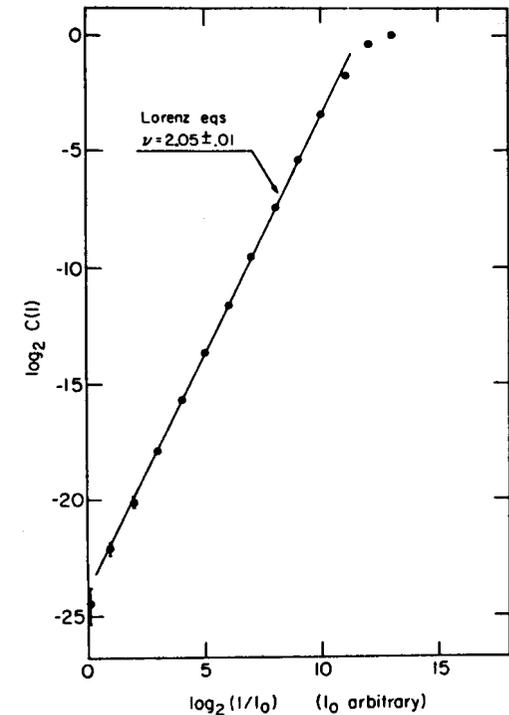


Quindi la **stima della pendenza** del grafico va effettuata per valori di  $r$  intermedi.

Esempio: sistema di Lorenz in regime caotico

Poiché è un sistema a **tempo continuo**, una sequenza  $S = \{x(0), x(1), \dots\}$  comprendente 15000 punti (traiettoria a tempo discreto) è stata ottenuta **campionando**  $x(t)$  con periodo fissato  $T = 0.25$ .

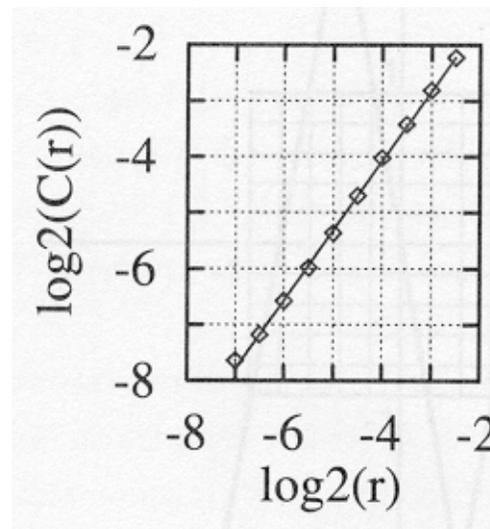
La **stima della pendenza** fornisce  $d_C \cong 2.05$ .



Esempio: mappa di Henon in regime caotico

Partendo da una traiettoria comprendente 1000 punti,  $C(r)$  è calcolato per vari valori di  $r$ .

$d_C \cong 1.23$  è la **dimensione** stimata.



Nota bene: per  $n$  elevato, la dimensione di correlazione  $d_C$  è **computazionalmente più conveniente** della dimensione "box-counting"  $d_B$ .

Infatti, il **numero di box** da utilizzare per il calcolo di  $d_B$  **cresce esponenzialmente** con  $n$ .

E' possibile dimostrare che, per un qualunque insieme  $S$ , vale la **disuglianza**

$$d_B \geq d_C$$

## Dimensione di Liapunov

E' relativa ad una **traiettoria**, a cui sono associati gli **esponenti di Liapunov**

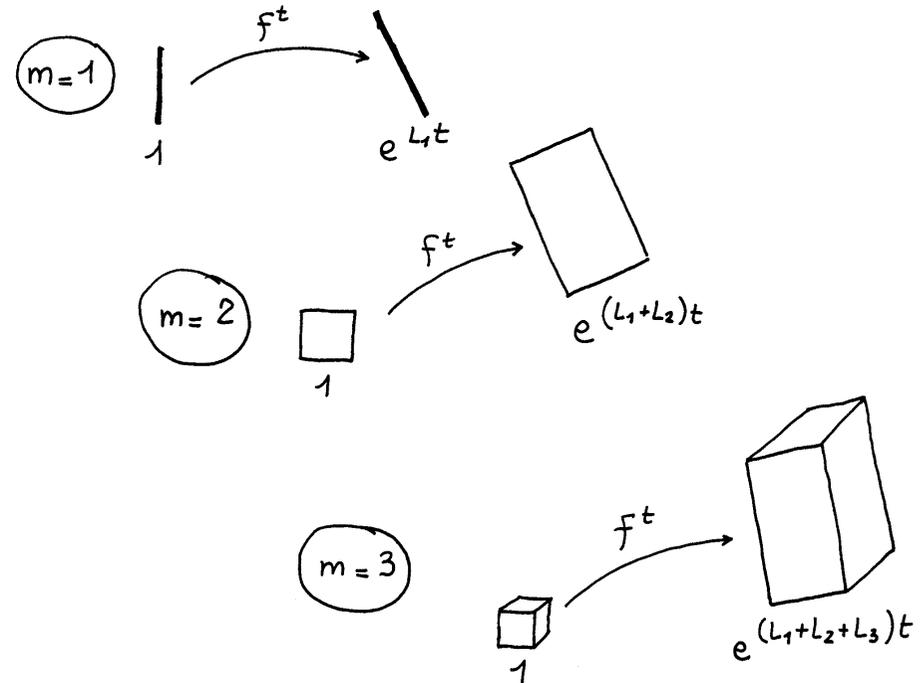
$$L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_n$$

Ricordiamo che, per ogni  $m \leq n$

$$\exp(S_m) = \exp(L_1 + L_2 + \dots + L_m)$$

è il **tasso medio di espansione** (se  $> 1$ ) o **contrazione** (se  $< 1$ ) dei **volumi  $m$ -dimensionali** lungo la traiettoria.

Per un sistema **dissipativo** sarà pertanto  $S_n < 0$ .



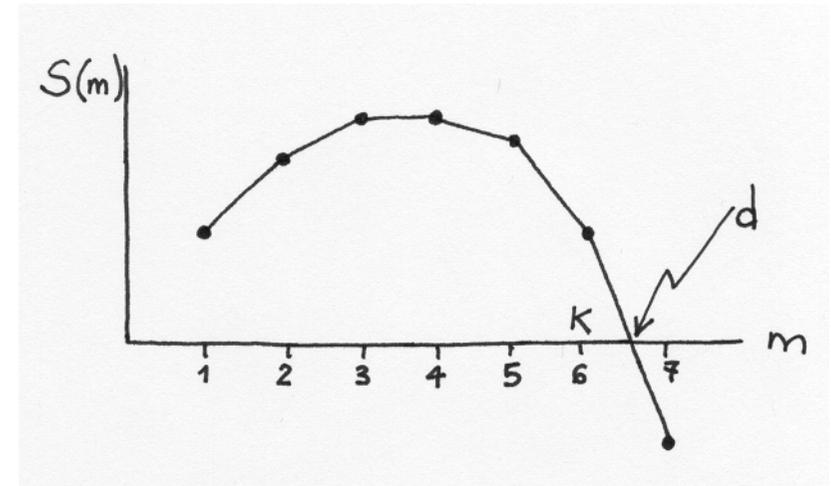
Per un **attrattore caotico**  $A$  risulta  $S_1 = L_1 > 0$ , e inoltre  $S_n < 0$  se il sistema è **dissipativo**. Quindi,  $S_m$  in funzione di  $m$  ha un andamento di questo tipo:

Poiché

- $S_k > 0$ , i volumi  $k$ -dim si **espandono**
- $S_{k+1} < 0$ , i volumi  $(k+1)$ -dim si **contraggono**

esisterà  $d_L$  non intero ( $k < d_L < k+1$ ) tale che i volumi  $d_L$ -dimensionali **rimangono invariati**.

⇒ **L'attrattore  $A$  ha dimensione  $d_L$** .



La **formula di Kaplan-Yorke** stima  $d_L$  per interpolazione lineare:

$$d_L = k + \frac{S_k}{|L_{k+1}|}, \quad \text{dove } k = \max\{m \mid S_m \geq 0\}$$

Esempio: mappa di Henon ( $n = 2$ )

Il calcolo degli esponenti di Liapunov fornisce  $L_1 = 0.39$ ,  $L_2 = -1.59$ . Quindi  $k = 1$  e

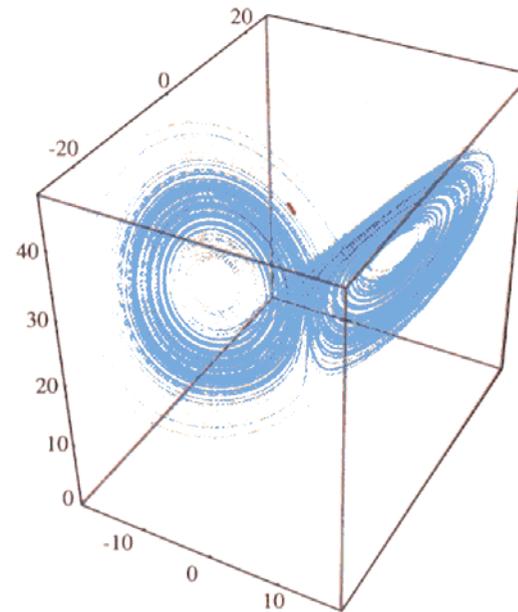
$$d_L = 1 + 0.39/1.59 = 1.25$$

Esempio: sistema di Lorenz ( $n = 3$ )

$$L_1 = 0.905, L_2 = 0, L_3 = -14.57.$$

Quindi  $k = 2$  e

$$d_L = 2 + 0.905/14.57 = 2.062$$



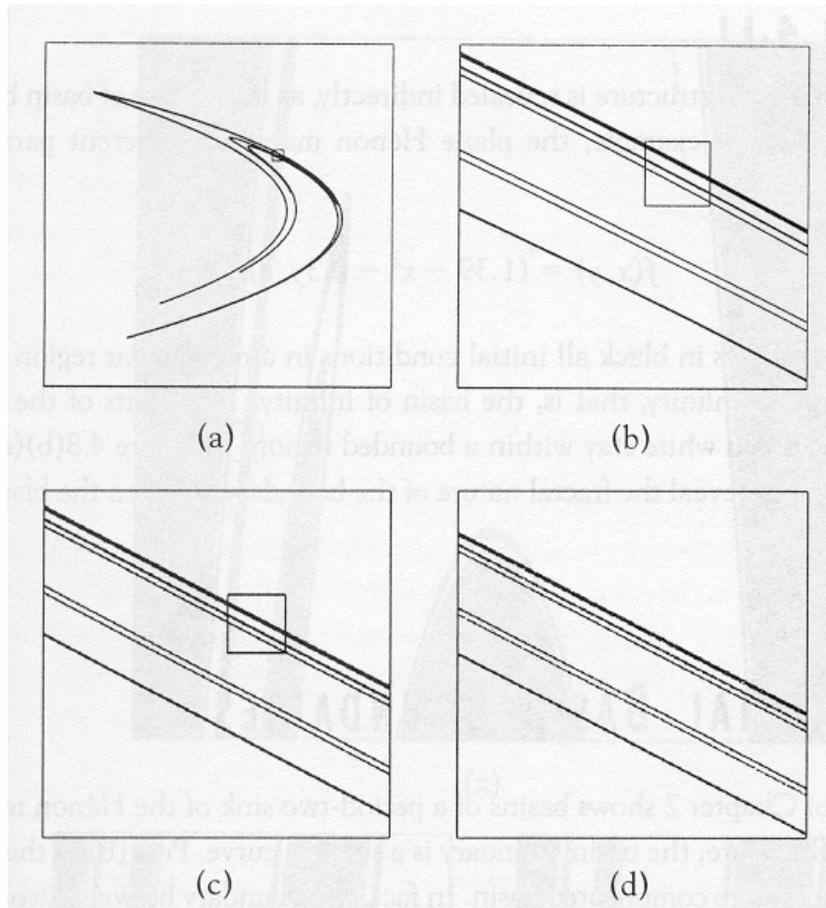
## INSIEMI FRATTALI E SISTEMI DINAMICI

Nello studio dei sistemi dinamici non lineari, si incontrano **insiemi frattali** in varie circostanze.

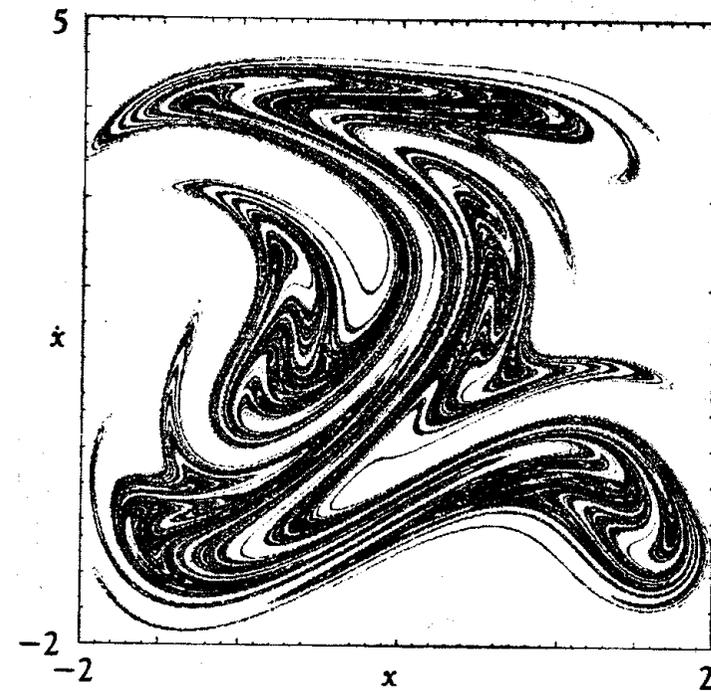
- Tipicamente (ma non sempre...), gli **attrattori caotici** sono **insiemi frattali**.
- Un **bacino di attrazione** (di un equilibrio, di un ciclo, di un attrattore caotico, ma anche dell'infinito...) può avere **frontiera frattale**.
- Nello spazio dei **parametri**, la regione in cui il sistema ha lo stesso **comportamento qualitativo** può avere **frontiera frattale**.

## Attrattori caotici

Esempio: sistema di Henon  
(a tempo discreto,  $n = 2$ )

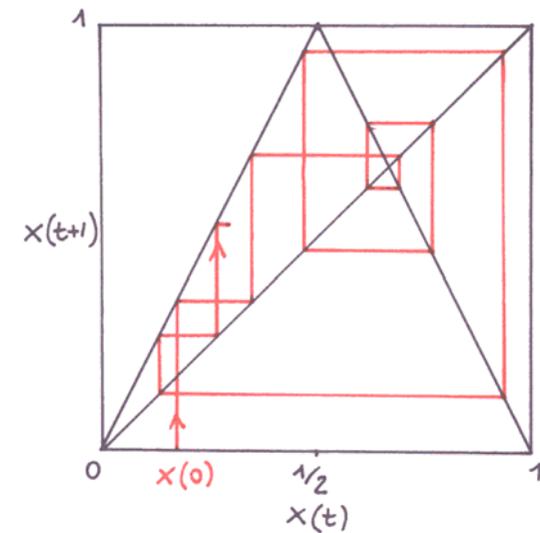


Esempio: barriera di potenziale forzata  
(a tempo continuo, periodico,  $n = 2$ )



Tipicamente, un **attrattore caotico** ha **dimensione frattale**. Vi sono però **eccezioni**:

**Mappa a tenda**:  $L_1 = \ln 2 > 0$  (**caos**) ma  $x(t)$  ricopre densamente l'intervallo  $[0,1]$  (quindi  $d = 1$ , **intero**).



**Mappa logistica**: per  $r = r_\infty = 3.5699456\dots$  (frontiera del caos), risulta  $d_C = 0.5$  (**frattale**) ma  $L_1 = 0$ .

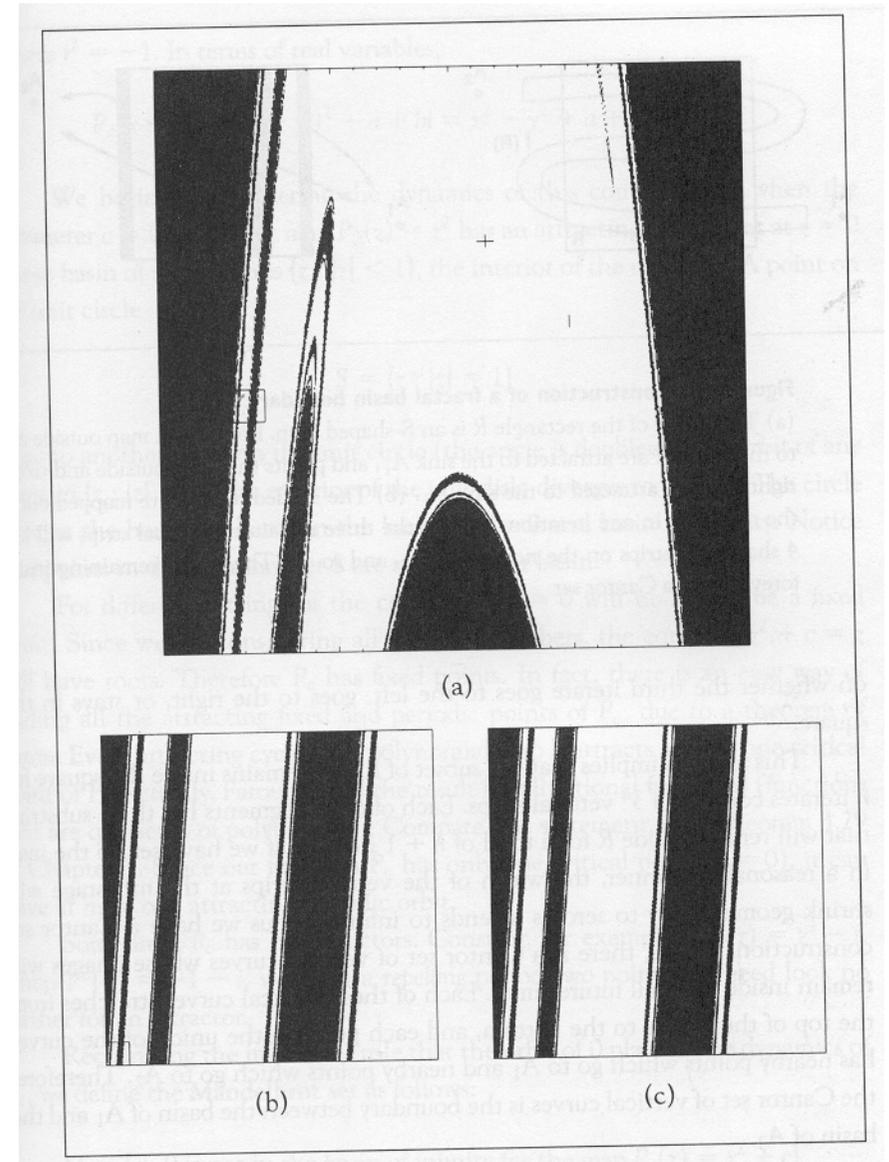
**attrattore caotico**  $\neq$  **attrattore frattale ("strano")**  
( $L_1 > 0$ ) ( $d$  non intero)

## Bacini di attrazione

Esempio: mappa di Henon

La regione bianca è il **bacino di attrazione** di un ciclo di periodo 2.

L'insieme rivela la medesima struttura a scala sempre più piccola (**autosomiglianza**).



## Diagrammi parametrici

Esempio: insieme di Mandelbrot

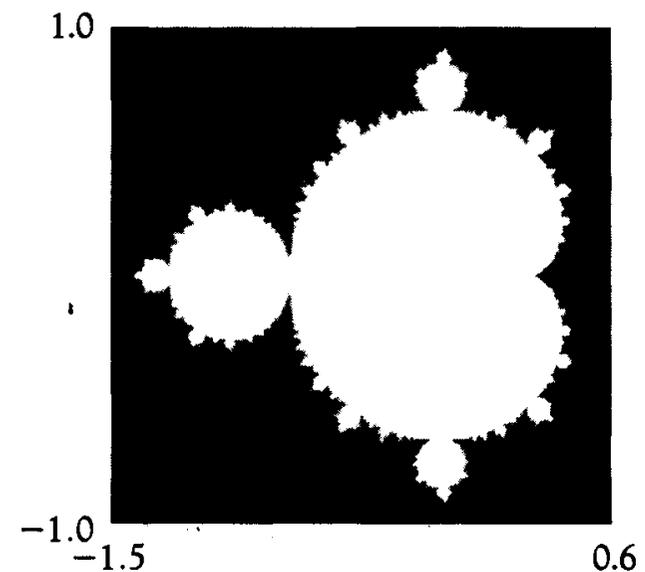
La mappa

$$z(t+1) = z(t)^2 + c$$

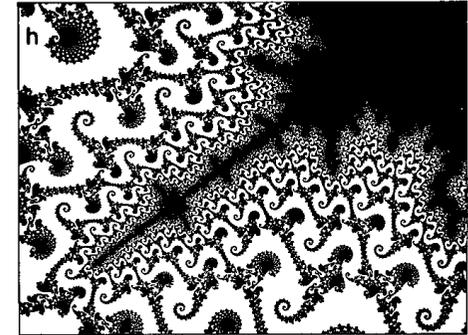
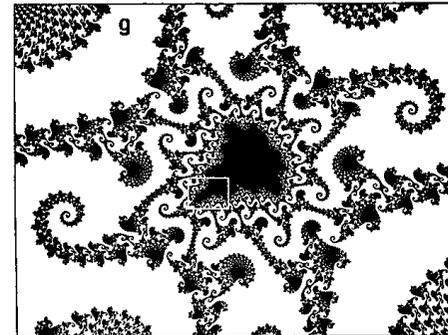
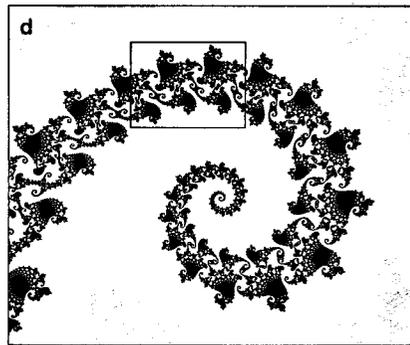
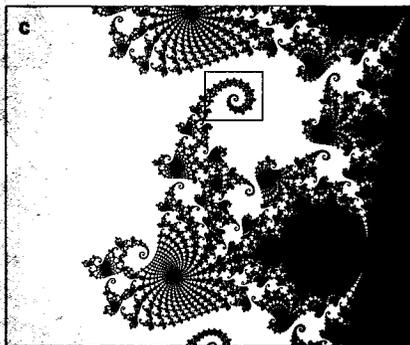
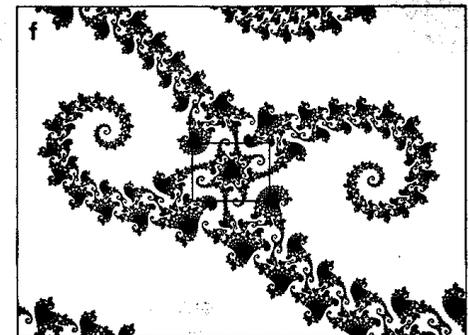
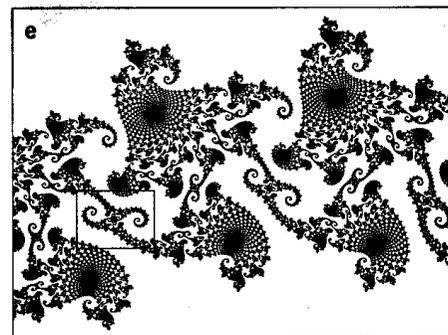
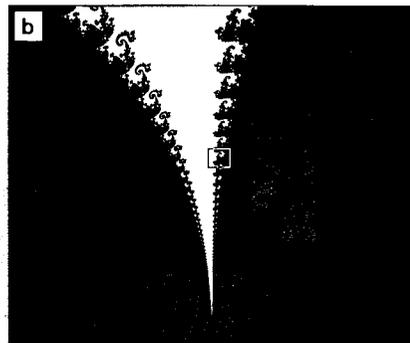
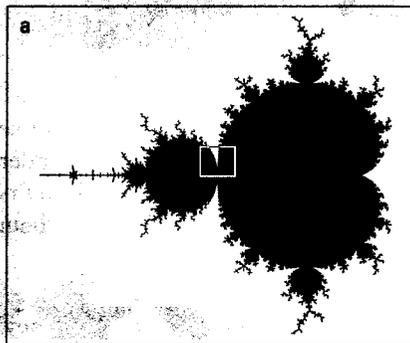
con  $z$  e  $c$  **complessi**, è equivalente a un sistema (a variabili reali) del **secondo ordine** (con 2 variabili di stato,  $x = \text{Re}(z)$  e  $y = \text{Im}(z)$ , e 2 parametri,  $a = \text{Re}(c)$  e  $b = \text{Im}(c)$ ).

Nel piano complesso di  $c$ , **l'insieme di Mandelbrot**  $M$  è definito come l'insieme per cui la traiettoria che parte da  $z = 0$  **rimane limitata** (insieme bianco in figura).

La **frontiera** di  $M$  è un insieme **frattale**.



Una successione di zoomate nell'insieme di Mandelbrot:



Fissato un valore  $c \in M$  (un punto dell'insieme di Mandelbrot), vi è un insieme  $B$  di stati iniziali  $z(0)$  che danno luogo a **traiettorie limitate** (sicuramente  $B$  non è vuoto, poiché contiene almeno  $z(0) = 0$ ).

La **frontiera** di  $B$  si chiama **insieme di Julia**, ed è un insieme **frattale**.

In figura, in bianco l'insieme di  $z(0)$  che danno luogo a traiettorie limitate.

- (a)  $c = -0.17 + 0.78i$
- (b) uno zoom nella figura (a)
- (c)  $c = 0.38 + 0.32i$
- (d)  $c = 0.32 + 0.043i$

